MÉTHODOLOGIE I

SUITES RÉCURRENTES ET IMPLICITES.

L'objectif de ce travail est de passer en revue l'ensemble des méthodes qui permettent d'étudier les suites définies par une relation de récurrence (non nécessairement linéaire) ou les suites définies comme solution d'une équation (suites implicites).

Dans le chapitre 10, nous étudierons les méthodes qui permettent de s'attaquer aux suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur, comme par exemple la suite de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Une technique d'analyse qui passe par la résolution de l'équation caractéristique est présentée dans le TD01.

Exercice 1.- ***Préliminaires.***

1. Énoncer le théorème de la bijection. Quel rôle joue-t-il dans l'étude des suites implicites ?
2. En s'inspirant des exemples donnés en cours, proposer une méthode qui permette de donner le sens de variation d'une suite implicite.
3. Comment écrire un programme Python qui génère les termes d'une suite récurrente ?
4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme et par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f *croissante*. Que peut-on dire sur la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Il n'y a pas d'équivalent de ce résultat lorsque la fonction est décroissante.
5. On considère une suite définie par la donnée de son premier terme et par $u_{n+1} = f(u_n)$. Qu'est-ce qu'un intervalle stable pour f ?
   - **a.** Comment peut-on exploiter un intervalle stable pour étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - **b.** Montrer qu'un intervalle stable permet de minorer et majorer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. On suppose que l'on a montré qu'une suite récurrente converge (par exemple en ayant appliqué le théorème de la limite monotone. Énoncer le théorème du point fixe. Qu'en déduit-on comme informations sur la limite de la suite ?
7. Énoncer le théorème des accroissements finis. Quel rôle joue-t-il dans l'étude des suites récurrentes ?

Exercice 2.- *D'après* ***EDHEC 2000.***

Pour tout entier supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.

   b. Calculer u_1 et u_2.

   c. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.
2. **a.** Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

   b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis les variations de la suite (u_n).

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. a. Déterminer la limite de (u_n^n) lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Donner enfin la valeur de ℓ.

4. (Cubes) Montrer que la série de terme général $\frac{2}{3} - u_n$ est convergente.

Exercice 3.- *D'après **EML 2002**.*
On considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I : étude des fonctions polynomiales P_n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$,

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1},$$

où P_n' est la fonction dérivée de P_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(1) < 0$.

4. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(\frac{-1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geqslant 0$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$ admet une solution et une seule notée x_n et que

$$0 < x_n \leqslant 2.$$

6. Écrire un programme en Scilab qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II : Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \geqslant 1$,

$$t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1).$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geqslant \frac{n}{2} (x_n - 1)^2,$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leqslant \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure sur la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Compléments (préparation top 6)

Il arrive que l'on rencontre des suites définies par la donnée du premier terme et une relation "de récurrence" de la forme

$$u_{n+1} = f_n(u_n)$$

où f_n est une suite de fonctions (qui change avec n). Il n'existe aucune méthode systématique pour étudier la limite de ces suites et il faudra souvent faire preuve d'initiative. Cependant, si l'exercice ne donne pas de meilleure indication, on peut essayer la stratégie suivante.

1. On suppose que la limite ℓ existe. Cette limite est donc solution de l'équation

$$\ell = f_n(\ell).$$

2. On résout cette équation. Dans **certains** cas, la solution ℓ est unique et ne dépend pas de n (attention, rien n'est garanti).

3. On pose alors $v_n = u_n - \ell$ et on cherche une relation de récurrence qui permette de montrer que cette suite tend vers 0.

Exercice 4.- *Un exemple (**difficile**).*
Trouver la limite de la suite définies par $u_1 > 0$ et par

$$(n+2)^2 u_{n+1} = n^2 u_n - (n+1).$$